DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MAT 661 – M2 AAG (HIVER 2021)
MORDELL-LANG DYNAMIQUE

CHARLES FAVRE

Dans cette feuille $(K, |\cdot|)$ est un corps métrisé non-archimédien complet, et $T = (T_1, \cdots, T_d)$.

Exercice 1. On rappelle que pour une série $f(T) = \sum_{I \in \mathbb{N}^d} a_I T^I$ avec $a_I \in K$, on pose $\|f\| = \sup_I\{|a_I|\}$, et que $f \in K\langle T\rangle$ si $|a_I| \to 0$ lorsque $|I| \to \infty$.

Montrer que pour toute paire de fonctions $f, g \in K\langle T\rangle$, on a

$$\|f \cdot g\| = \|f\| \times \|g\|$$

Exercice 2. On suppose que $\tilde{K}$ est infini.

Montrer qu'une série $f \in K\langle T\rangle$ appartient à $K^\circ\langle T\rangle$ si et seulement si $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in (K^\circ)^d$.

Exercice 3. On fixe une application $f = (f_1, \cdots, f_d)$ avec $f_i \in K^\circ\langle T\rangle$, et pour tout $h \in K\langle T\rangle$ on note $\Delta h = h \circ f - h$.

Montrer que $\Delta h \in K^\circ\langle T\rangle$

Exercice 4. Dans cet exercice $d = 1$ de telle sorte que $T = T_1$.

Soit $f = \sum a_n T^n \in K^\circ\langle T\rangle$ tel que $\|f\| = \max\{|a_n|\} = 1$. On note $\tilde{a}_n \in \tilde{K}$ la classe résiduelle de a_n et $\tilde{f} = \sum_n \tilde{a}_n T^n$.

(1) Montrer que $\tilde{f}$ est un polynôme.
(2) Soit $z_0 \in K^\circ$ tel que $\tilde{z}_0$ est une racine simple de $\tilde{f}$. Montrer qu'il existe un unique zéro z_0' de f tel que $|z_0 - z_0'| < 1$.

Exercice 5. On travaille dans $\mathbb{C}_p$.

(1) Montrer que la série $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge ssi $|z| < r_p := p^{-1/(p-1)}$.
(2) Montrer que la série $\log(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ converge ssi $|z| < 1$.
(3) Montrer que $|\log(1+z)| = |z|$ pour tout $|z| < r_p$.
(4) Montrer que $\exp(\log(1+z)) = z$ pour tout $|z| < r_p$.
(5) Montrer que exp induit un homomorphisme isométrique du groupe additif $\{|z| < r_p\}$ sur le groupe multiplicatif $1 + M_p := \{z, |z-1| < r_p\}$.
(6) En déduire que l'homomorphisme $z \mapsto \log z$ est surjectif de $1 + M_p$ sur $(\mathbb{C}_p^\circ, +)$.

Date: 27 avril 2021.

Exercice 6. On fixe un nombre premier p.

(1) Lorsque n est un entier premier à p montrer que $T^n = 1$ possède exactement n solutions $z_1, \cdots, z_n$ et que $|z_i - z_j| = 1$ pour tout $i \neq j$.

(2) Soit $\zeta \neq 1$ une solution de $T^p = 1$. On écrit $\zeta = 1 + \xi$. Montrer tout d'abord que $|\xi| < 1$, puis qu'il existe $|x| \leq 1$ tel que $\xi^{p-1} + p(1 + \xi x) = 0$. En déduire que $|\zeta - 1| = |p|^{1/(p-1)}$.

(3) On suppose $p \geq 3$ Montrer l'optimalité de la condition $f(T) \equiv T \mod p^c$ avec $c > 1/(p-1)$ dans le théorème de Poonen. On considèrera l'application $f(T) = \zeta T$ avec $\zeta^p = 1$.

(4) Faire le même travail avec $p = 2$ (on pourra considérer l'application $f(T) = -T$).